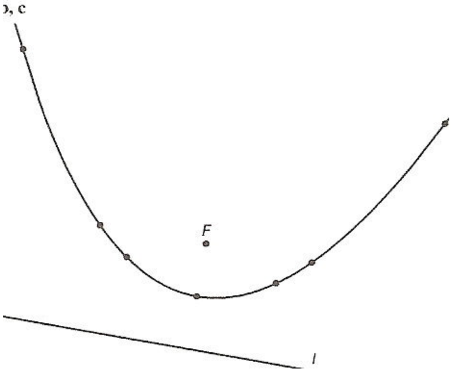
## Hoofdstuk 11: Kegelsneden

### 11.1 De parabool

**<u>Opgave 1:</u>**




**<u>Opgave 2:</u>**

a. $d(P,F)=\sqrt{x^2+(y-\frac{1}{2}p)^2}$

$d(P,l)=y+\frac{1}{2}p$

$\sqrt{x^2+(y-\frac{1}{2}p)^2}=y+\frac{1}{2}p$

$x^2+(y-\frac{1}{2}p)^2=(y+\frac{1}{2}p)^2$

$x^2+y^2-py+\frac{1}{4}p^2=y^2+py+\frac{1}{4}p^2$

$x^2=2py$

b. Een parabool met brandpunt $F(-\frac{1}{2}p,0)$ en richtlijn $l:x=\frac{1}{2}p$. Dit is een liggende parabool met de opening naar links.

**<u>Opgave 3:</u>**

a. $\frac{1}{2}p=6$ dus $p=12$

$y^2=24x$

b. $-\frac{1}{2}p=8$ dus $p=-16$

$y^2=-32x$

c. $\frac{1}{2}p=-4$ dus $p=-8$

$x^2=-16y$

d. $\frac{1}{2}p=3$ dus $p=6$

$x^2=12y$

**<u>Opgave 4:</u>**

a. $x=2p\lambda^2 \quad \wedge \quad y=2p\lambda$

$y^2=(2p\lambda)^2=4p^2\lambda^2=2p\cdot 2p\lambda^2=2px$

dus $y^2=2px$

b. $x=6\lambda^2 \quad \wedge \quad y=6\lambda$

$y^2=(6\lambda)^2=36\lambda^2=6\cdot 6\lambda^2=6x$

dus $y^2=6x$

c. I: $y^2 = -x$

$y = \lambda$ dan $x = -y^2 = -\lambda^2$

dus $x = -\lambda^2 \quad \wedge \quad y = \lambda$

II: $y = \frac{1}{4}x^2$

$x = \lambda$ dan $y = \frac{1}{4}\lambda^2$

dus $x = \lambda \quad \wedge \quad y = \frac{1}{4}\lambda^2$

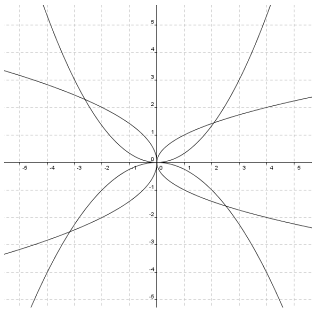
III: $y = 2x^2 + 5$

$x = \lambda$ dan $y = 2\lambda^2 + 5$

dus $x = \lambda \quad \wedge \quad y = 2\lambda^2 + 5$

**Opgave 5:**

a.



b. $y^2 = x \xrightarrow{T(5,6)} (y-6)^2 = x - 5$

c. $p_2: \quad y^2 = -2x \xrightarrow{T(5,6)} (y-6)^2 = -2(x-5)$

$p_3: \quad x^2 = 3y \xrightarrow{T(5,6)} (x-5)^2 = -3(y-6)$

$p_4: \quad x^2 = -4y \xrightarrow{T(5,6)} (x-5)^2 = -4(y-6)$

d. $y^2 = x$ heeft als top $(0,0)$ , brandpunt $(\frac{1}{4},0)$ en richtlijn $x = -\frac{1}{4}$

$(y-6)^2 = x - 5$ ontstaat uit $y^2 = x$ door $T(5,6)$

dus top $(5,6)$ , brandpunt $(5\frac{1}{4},6)$ en richtlijn $x = 4\frac{3}{4}$

e. $p_2: \quad y^2 = -2x$ heeft top $(0,0)$ , brandpunt $(-\frac{1}{2},0)$ en richtlijn $x = \frac{1}{2}$

dus $(y-6)^2 = -2(x-5)$ heeft top $(5,6)$ , brandpunt $(4\frac{1}{2},6)$ en richtlijn $x = 5\frac{1}{2}$

$p_3: \quad x^2 = 3y$ heeft top $(0,0)$ , brandpunt $(0,\frac{3}{4})$ en richtlijn $y = -\frac{3}{4}$

dus $(x-5)^2 = 3(y-6)$ heeft top $(5,6)$ , brandpunt $(5,6\frac{3}{4})$ en richtlijn $y = 5\frac{1}{4}$

$p_4: \quad x^2 = -4y$ heeft top $(0,0)$ , brandpunt $(0,–1)$ en richtlijn $y = 1$

dus $(x-5)^2 = -4(y-6)$ heeft top $(5,6)$ , brandpunt $(5,5)$ en richtlijn $y = 7$

**Opgave 6:**

a. $y^2 + 10y = 4x - 1$

$(y+5)^2 - 25 = 4x - 1$

$(y+5)^2 = 4x + 24$

$(y+5)^2 = 4(x+6)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y^2 = 4x$ | top $(0,0)$ | $F(1,0)$ | $l: \quad x = -1$ | as: $y = 0$ |
| $T(-6-5)$ dus | top $(-6,–5)$ | $F(-5,–5)$ | $l: \quad x = -7$ | as: $y = -5$ |

b. $x^2 - 6x = 2y - 3$

$(x-3)^2 - 9 = 2y - 3$

$(x-3)^2 = 2y + 6$

$(x-3)^2 = 2(y+3)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x^2 = 2y$ | top $(0,0)$ | $F(0,\frac{1}{2})$ | $l:\ y = -\frac{1}{2}$ | as: $x = 0$ |
| $T(3,-3)$ | top $(3,-3)$ | $F(3,-2\frac{1}{2})$ | $l:\ y = -3\frac{1}{2}$ | as: $x = 3$ |

c. $y^2 + 5x + 4y = 1$

$(y+2)^2 - 4 = -5x + 1$

$(y+2)^2 = -5x + 5$

$(y+2)^2 = -5(x-1)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y^2 = -5x$ | top $(0,0)$ | $F(-1\frac{1}{4},0)$ | $l:\ x = 1\frac{1}{4}$ | as: $y = 0$ |
| $T(1,-2)$ | top $(1,-2)$ | $F(-\frac{1}{4},-2)$ | $l:\ x = 2\frac{1}{4}$ | as: $y = -2$ |

d. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6$

$\frac{1}{4}x^2 - 3x = -y - 6$

$x^2 - 12x = -4y - 24$

$(x-6)^2 - 36 = -4y - 24$

$(x-6)^2 = -4y + 12$

$(x-6)^2 = -4(y-3)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x^2 = -4y$ | top $(0,0)$ | $F(0,-1)$ | $l:\ y = 1$ | as: $x = 0$ |
| $T(6,3)$ | top $(6,3)$ | $F(6,2)$ | $l:\ y = 4$ | as: $x = 6$ |

**Opgave 7:**

a. $y^2 = 2px \qquad F(\frac{1}{2}p,0) \qquad l:\ x = -\frac{1}{2}p$

$T(a,b) \qquad F(\frac{1}{2}p + a, b) \qquad l:\ x = -\frac{1}{2}p + a$

b. $y = ax^2 + bx + c$

$ax^2 + bx = y - c$

$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{1}{a}y - \frac{c}{a}$

$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{a}y - \frac{c}{a}$

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}y + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2}{4a} - c)$

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2-4ac}{4a})$

als $x^2 = \frac{1}{a}y$ dan $F = (0, \frac{1}{4a}) \qquad l:\ y = -\frac{1}{4a}$

$T(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}) \qquad F = (-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}) = (-\frac{b}{2a}, \frac{1-b^2+4ac}{4a})$

$l:\ y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{-1-b^2+4ac}{4a}$

**Opgave 8:**

a. $y^2 + ay = ax + a^2$

$(y + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 = ax + a^2$

$(y+\frac{1}{2}a)^2 = ax + 1\frac{1}{4}a^2$

$(y+\frac{1}{2}a)^2 = a(x+1\frac{1}{4}a)$

als $y^2 = ax$ dan top $(0,0)$ en $F(\frac{1}{4}a,0)$

$T(-1\frac{1}{4}a,-\frac{1}{2}a)$ dus top $(-1\frac{1}{4}a,-\frac{1}{2}a)$ en $F(-a,-\frac{1}{2}a)$

b. $(-a)^2 + (-\frac{1}{2}a)^2 = 10$

$a^2 + \frac{1}{4}a^2 = 10$

$1\frac{1}{4}a^2 = 10$

$a^2 = 8$

$a = 2\sqrt{2} \quad \vee \quad a = -2\sqrt{2}$

**Opgave 9:**

a. $\begin{cases} y^2 = 6x \\ y = 2x \end{cases}$

$4x^2 = 6x$

$4x^2 - 6x = 0$

$4x(x - 1\frac{1}{2}) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 1\frac{1}{2}$

$y = 0 \quad \vee \quad y = 3$

$(0,0)$ en $(1\frac{1}{2},3)$

b. $(2x-1)^2 = 6x$

$4x^2 - 4x + 1 = 6x$

$4x^2 - 10x + 1 = 0$

$D = 100 - 16 = 84 > 0$ dus twee snijpunten

c. $(2x + \frac{3}{4})^2 = 6x$

$4x^2 + 3x + \frac{9}{16} = 6x$

$4x^2 - 3x + \frac{9}{16} = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{16} = 0$ dus 1 oplossing, dus het is een raakpunt

**Opgave 10:**

a. $y^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$

$6x = 6 \cdot \frac{3}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = y^2$ dus klopt

b. $y = \sqrt{6x}$

c. $y = \sqrt{6x} = (6x)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(6x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = 3 \cdot (6x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{6x}} = \frac{3}{y}$

$rc = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=\frac{3}{8}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$

$l: \quad y - \frac{3}{2} = 2(x - \frac{3}{8})$

**Opgave 11:**

a. $-8abp = -4p^2$ links en rechts delen door $-4p$ levert
$2ab = p$
je mag delen door $p$ omdat $p \neq 0$

b. als $a = 0$ heb je te maken met een horizontale lijn en dat kan geen raaklijn worden aan de parabool.

**Opgave 12:**

a. als $y_A < 0$ dan ligt $A$ op $y = -\sqrt{2px}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{2px}} \cdot 2p = \frac{-p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$$

dus $k: \quad y - y_A = \frac{p}{y_A}(x - x_A)$

$$y = \frac{p}{y_A}(x - x_A) + y_A$$
$$y_A \cdot y = p(x - x_A) + {y_A}^2$$
$$y_A \cdot y = px - px_A + {y_A}^2$$
$$y_A \cdot y = px - px_A + 2px_A$$
$$y_A \cdot y = px + px_A$$

b. $y_A = 0$ geeft $x_A = 0$ dus $A(0,0)$
dit geeft: $0 \cdot y = p \cdot x + p \cdot 0$
dus $x = 0$ als vergelijking van de raaklijn en dat klopt, want $x = 0$ is de raaklijn in de top $(0,0)$ van de parabool $y^2 = 2px$

**Opgave 13:**

a. $a = \frac{1}{4}$ en $p = 4$

$$k: \quad y = \tfrac{1}{4}x + \frac{4}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$
$$k: \quad y = \tfrac{1}{4}x + 8$$

b. $-6y = 4x + 4 \cdot 4\tfrac{1}{2}$
$$-6y = 4x + 18$$
$$y = -\tfrac{2}{3}x - 3$$

c. raaklijn $m: \quad 4y = 4x + 4 \cdot 2$
$$4y = 4x + 8$$
$$-x + y = 2$$
normaal $n: \quad x + y = c$ door $(2,4)$
$$x + y = 6$$

**Opgave 14:**

a. $k: \quad y_A \cdot y = p \cdot x + p \cdot x_A$
snijpunt $x$-as dus $y = 0$
$$p \cdot x_B + p \cdot x_A = 0$$
$$p(x_B + x_A) = 0$$
$$x_B = -x_A$$

$k: \quad p \cdot x - y_A \cdot y = -p \cdot x_A$

$\vec{n}_k = \begin{pmatrix} p \\ -y_A \end{pmatrix}$

$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} y_A \\ p \end{pmatrix}$

$l: \quad y_A \cdot x + p \cdot y = c$ door $(x_A, y_A)$

$y_A \cdot x + p \cdot y = x_A \cdot y_A + p \cdot y_A$

snijpunt $x$-as dus $y = 0$

$y_A \cdot x_C = x_A \cdot y_A + p \cdot y_A$

$x_C = x_A + p$

b. $B(-x_A, 0)$ en $C(x_A + p, 0)$

$BC = |2x_A + p|$

**Opgave 15:**

$y^2 = 2px \qquad F(\frac{1}{2}p, 0) \qquad l: \quad x = -\frac{1}{2}p$

$B(-\frac{1}{2}p, y_A)$

raaklijn in punt $A$: $\quad y_A \cdot y = p \cdot x + p \cdot x_A$

$m$ is de middelloodlijn van $BF$

$\vec{r}_{BF} = \begin{pmatrix} p \\ -y_A \end{pmatrix} = \vec{n}_m$

$M$ is het midden van $BF$ dus $M = (0, \frac{1}{2}y_A)$

$m: \quad p \cdot x - y_A \cdot y = c$ door $(0, \frac{1}{2}y_A)$

$p \cdot x - y_A \cdot y = -\frac{1}{2}{y_A}^2$

$p \cdot x - y_A \cdot y = -\frac{1}{2} \cdot 2px_A$

$p \cdot x - y_A \cdot y = -p \cdot x_A$

$p \cdot x + p \cdot x_A = y_A \cdot y$ en dat is de raaklijn in punt $A$

**Opgave 16:**

a. $c: \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

$c$ raakt de $x$-as dus $y = 0$ en $x = x_M$

dus ${y_M}^2 = r^2$

$c$ door $(0,2)$ dus ${x_M}^2 + (2 - y_M)^2 = r^2$

${x_M}^2 + (2 - y_M)^2 = {y_M}^2$

${x_M}^2 + 4 - 4y_M + {y_M}^2 = {y_M}^2$

${x_M}^2 + 4 - 4y_M = 0$

$-4y_M = -4 - {x_M}^2$

$y_M = \frac{1}{4}{x_M}^2 + 1$

dus voor alle middelpunten geldt: $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$

b. $c: \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

$c$ raakt de $x$-as dus $y = 0$ en $x = x_M$

dus $y_M{}^2 = r^2$

$c$ door $(3,4)$ dus $(3 - x_M)^2 + (4 - y_M)^2 = r^2$

$(3 - x_M)^2 + (4 - y_M)^2 = y_M{}^2$

$(x_M - 3)^2 + 16 - 8y_M + y_M{}^2 = y_M{}^2$

$(x_M - 3)^2 = 8y_M - 16$

$(x_M - 3)^2 = 8(y_M - 2)$

dus de middelpunten liggen op de parabool $(x - 3)^2 = 8(y - 2)$

**Opgave 17:**

a. $k: \quad 4 \cdot y = 1 \cdot x + 1 \cdot 8 \quad$ dus $\quad x - 4y = -8$

$l: \quad -2 \cdot y = 1 \cdot x + 1 \cdot 2 \quad$ dus $\quad x + 2y = -2$

b. $\begin{cases} x - 4y = -8 \\ x + 2y = -2 \quad - \end{cases}$

$-6y = -6$

$y = 1$

$x = -4$

dus $P(-4,1)$

c. $AB: \quad y - 4 = \frac{-2-4}{2-8}(x - 8)$

$y = 1 \cdot (x - 8) + 4$

$y = x - 4$

d. $P(-4,1)$ dus $1 \cdot y = x - 4$

dus $y = x - 4$

**Opgave 18:**

a. $k$ raakt de parabool $y^2 = 2px$ in het punt $A(x_A, y_A)$ dus $k: \quad y_A \cdot y = px + px_A$

lijn $k$ gaat door het punt $P(x_P, y_P)$ dus $y_A y_P = px_P + px_A$

$l$ raakt de parabool $y^2 = 2px$ in het punt $B(x_B, y_B)$ dus $l: \quad y_B \cdot y = px + px_B$

lijn $l$ gaat door het punt $P(x_P, y_P)$ dus $y_B y_P = px_P + px_B$

punt $A$ ligt op de lijn $y_P \cdot y = p \cdot x + p \cdot x_P$

punt $B$ ligt op de lijn $y_P \cdot y = p \cdot x + p \cdot x_P$

dus $AB: \quad y_P \cdot y = p \cdot x + p \cdot x_P$ is een vergelijking van de poollijn van $P(x_P, y_P)$

b. de poollijn van $Q(x_Q, y_Q)$ ten opzichte van de parabool $y^2 = 2px$ is de lijn

$y_Q \cdot y = p \cdot x + p \cdot x_Q$

translatie over $(x_T, y_T)$ geeft: de poollijn van $Q'(x_Q + x_T, y_Q + y_T)$ ten opzichte van de parabool $(y - y_T)^2 = 2p(x - x_T)$ is de lijn $y_Q \cdot (y - y_T) = p \cdot (x - x_T) + p \cdot x_Q$

$Q' = P(x_P, y_P)$ geeft $x_Q + x_T = x_P$ en $y_Q + y_T = y_P$

dus $x_Q = x_P - x_T$ en $y_Q = y_P - y_T$

dus de poollijn van $P(x_P, y_P)$ ten opzichte van de parabool $(y - y_T)^2 = 2p(x - x_T)$ is de lijn $(y_P - y_T)(y - y_T) = p(x - x_T) + p(x_P - x_T)$

**Opgave 19:**

a. de poollijn van $A(-4,-\frac{1}{2})$ ten opzichte van de parabool $y^2 = \frac{1}{2}x$ is de lijn:

$-\frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot -4$

dus $-\frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x - 1$

dus $\frac{1}{4}x = -\frac{1}{2}y + 1$

dus $x = -2y + 4$

de snijpunten van de poollijn met de parabool zijn:

$y^2 = \frac{1}{2}(-2y+4)$

$y^2 = -y + 2$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y+2)(y-1) = 0$

$y = -2 \quad \vee \quad y = 1$

$x = 8 \qquad\qquad x = 2$

raaklijn in $(2,1)$ is: $1\cdot y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot 2$ dus $y = \frac{1}{4}x + 2$

raaklijn in $(8,-2)$ is: $-2\cdot y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot 8$ dus $y = -\frac{1}{8}x - 1$

b. de poollijn van $B(1\frac{1}{2},1)$ ten opzichte van de parabool $y^2 = -2x$ is de lijn:

$1\cdot y = -x - 1\cdot 1\frac{1}{2}$

dus $y = -x - 1\frac{1}{2}$

de snijpunten van de poollijn met de parabool zijn:

$(-x - 1\frac{1}{2})^2 = -2x$

$x^2 + 3x + 2\frac{1}{4} = -2x$

$x^2 + 5x + 2\frac{1}{4} = 0$

$(x + 4\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = 0$

$x = -4\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$

$y = 3 \qquad\qquad y = -1$

raaklijn in $(-4\frac{1}{2},3)$ is: $3\cdot y = -x + -1\cdot -4\frac{1}{2}$ dus $x + 3y = 4\frac{1}{2}$

raaklijn in $(-\frac{1}{2},-1)$ is: $-1\cdot y = -x + -1\cdot -\frac{1}{2}$ dus $x - y = \frac{1}{2}$

c. $y^2 - 2y = 3x - 10$

$(y-1)^2 - 1 = 3x - 10$

$(y-1)^2 = 3x - 9$

$(y-1)^2 = 3(x-3)$

de poollijn van $C(0,1)$ ten opzichte van de parabool is:

$(1-1)(y-1) = 1\frac{1}{2}(x-3) + 1\frac{1}{2}(0-3)$

dus $0 = 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}$

$-1\frac{1}{2}x = -9$

$x = 6$

de snijpunten van de poollijn met de parabool zijn:

$(y-1)^2 = 3(6-3)$

$(y-1)^2 = 9$

$y - 1 = 3 \quad \vee \quad y - 1 = -3$

$y = 4 \quad \vee \quad y = -2$

raaklijn in $(6,4)$ is: $(4-1)(y-1) = 1\tfrac{1}{2}(x-3) + 1\tfrac{1}{2}(6-3)$

$3(y-1) = 1\tfrac{1}{2}x - 4\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}$

$3y - 3 = 1\tfrac{1}{2}x$

$3y = 1\tfrac{1}{2}x + 3$

$y = \tfrac{1}{2}x + 1$

raaklijn in $(6,-2)$ is: $(-2-1)(y-1) = 1\tfrac{1}{2}(x-3) + 1\tfrac{1}{2}(6-3)$

$-3(y-1) = 1\tfrac{1}{2}x - 4\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}$

$-3y + 3 = 1\tfrac{1}{2}x$

$-3y = 1\tfrac{1}{2}x - 3$

$y = -\tfrac{1}{2}x + 1$

**Opgave 20:**

a. $a = 1$ en $p = 2$ dus

$k: \quad y - 2 = 1 \cdot (x-3) + \tfrac{2}{2 \cdot 1}$

$y - 2 = x - 3 + 1$

$y = x$

b. $l: \quad (4-2)(y-2) = 2(x-3) + 2 \cdot (4-3)$

$2(y-2) = 2x - 6 + 2$

$2y - 4 = 2x - 4$

$2y = 2x$

$y = x$

c. raaklijn $m$ in $(3\tfrac{1}{4},1)$ aan de parabool is:

$m: \quad (1-2)(y-2) = 2(x-3) + 2(3\tfrac{1}{4} - 3)$

$-1(y-2) = 2x - 6 + \tfrac{1}{2}$

$-y + 2 = 2x - 5\tfrac{1}{2}$

$-2x - y = -7\tfrac{1}{2}$

$2x + y = 7\tfrac{1}{2}$

$\vec{n}_m = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus $\vec{n}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$n: \quad x - 2y = c$ door $(3\tfrac{1}{4},1)$

$x - 2y = 1\tfrac{1}{4}$

**Opgave 21:**

a. $y = -x + 3$ vermenigvuldiging met $-2$ geeft $-2y = 2x - 6$

b. $y^2 = 4x$ dus $p = 2$

dus de poollijn heeft vergelijking $y_P y = 2x + 2x_P$

dus $y_P = -2$ en $x_P = -3$

dus $P(-3,-2)$

c. $4x - 7y = 8$

$-7y = -4x + 8$

$3\frac{1}{2}y = 2x - 4$
$y_Q = 3\frac{1}{2}$ en $2x_Q = -4$ dus $x_Q = -2$
dus $Q(-2,3\frac{1}{2})$

**Opgave 22:**

a. $4y^2 = 9x$
$y^2 = 2\frac{1}{4}x$
$k:\quad \frac{5}{8}y = \frac{9}{8}x + \frac{9}{8}\cdot -3\frac{1}{2}$
$\frac{5}{8}y = \frac{9}{8}x - \frac{63}{16}$
$10y = 18x - 63$
$18x - 10y = 63$

b. de poollijn van $(-2,\frac{3}{4})$ ten opzichte van $y^2 = 2\frac{1}{4}x$ is:
$\frac{3}{4}y = \frac{9}{8}x + \frac{9}{8}\cdot -2$
$6y = 9x - 18$
$y = 1\frac{1}{2}x - 3$
de snijpunten van de poollijn met de parabool zijn:
$(1\frac{1}{2}x - 3)^2 = 2\frac{1}{4}x$
$2\frac{1}{4}x^2 - 9x + 9 = 2\frac{1}{4}x$
$2\frac{1}{4}x^2 - 11\frac{1}{4}x + 9 = 0$
$9x^2 - 45x + 36 = 0$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x-1)(x-4) = 0$
$x = 1 \quad \vee \quad x = 4$
$y = -1\frac{1}{2} \quad\quad y = 3$
raaklijn in $(1,-1\frac{1}{2})$ is: $-1\frac{1}{2}y = \frac{9}{8}x + \frac{9}{8}\cdot 1$
$\frac{9}{8}x + 1\frac{1}{2}y = -\frac{9}{8}$
$3x + 4y = -3$
raaklijn in $(4,3)$ is: $3y = \frac{9}{8}x + \frac{9}{8}\cdot 4$
$\frac{9}{8}x - 3y = -4\frac{1}{2}$
$3x - 8y = -12$

c. $9x + 24y = 45$
$24y = -9x + 45$
$-3y = \frac{9}{8}x - \frac{45}{8}$
$y_C = -3$ en $\frac{9}{8}x_C = -\frac{45}{8}$ dus $x_C = -5$
dus $C(-5,-3)$

**Opgave 23:**

de poollijn van $P(-2,2)$ ten opzichte van de parabool $y^2 = 2p(x-a)$ is de lijn $k$ met:
$k:\quad 2y = p(x-a) + p(-2-a)$
$2y = px - ap - 2p - ap$
$2y = px - 2ap - 2p$

$l: \quad 3x + y = 12$

$y = -3x + 12$

$2y = -6x + 24$

dus $p = -6$ en $-2ap - 2p = 24$

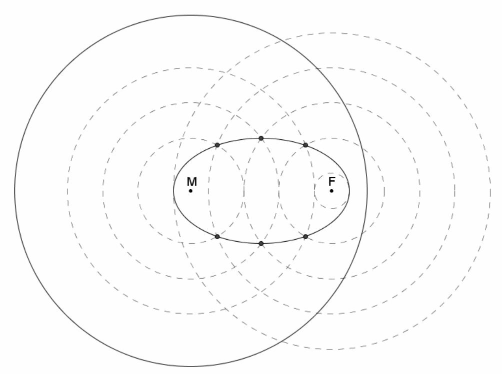
$12a + 12 = 24$

$12a = 12$

$a = 1$

## 11.2 De ellips

**Opgave 24:**




**Opgave 25:**

$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2b$

$\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2b$

$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2b-\sqrt{x^2+(y-c)^2}$

$x^2+(y+c)^2=4b^2-4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2+(y-c)^2$

$4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}=4b^2+(y-c)^2-(y+c)^2$

$4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}=4b^2+y^2-2cy+c^2-y^2-2cy-c^2$

$4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}=4b^2-4cy$

$b\sqrt{x^2+(y-c)^2}=b^2-cy$

$b^2(x^2+(y-c)^2)=b^4-2b^2cy+c^2y^2$

$b^2(x^2+y^2-2cy+c^2)=b^4-2b^2cy+c^2y^2$

$b^2x^2+b^2y^2-2b^2cy+b^2c^2=b^4-2b^2cy+c^2y^2$

$b^2x^2+b^2y^2-c^2y^2=b^4-b^2c^2$

$b^2x^2+(b^2-c^2)y^2=b^2(b^2-c^2)$

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

**Opgave 26:**

voor een cirkel geldt: $d(P,M)=r$

dus $2d(P,M)=2r$

dus $d(P,M)+d(P,M)=2r$

dus een cirkel is een ellips waarbij beide brandpunten samenvallen mat punt $M$

**Opgave 27:**

a. $a=5$ $b=3$ dus: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b. $a=6$ $c=5$

$c^2 = a^2 - b^2$
dus $b^2 = a^2 - c^2$
dus $b^2 = 36 - 25 = 11$
dus $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$

c. $b = 4 \quad c = 5$
$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 25 = 41$
dus $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1$

d. $a = 3$
dus $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ door $(1,2)$
dus $\frac{1}{9} + \frac{4}{b^2} = 1$
dus $\frac{4}{b^2} = \frac{8}{9}$
$8b^2 = 36$
$b^2 = 4\frac{1}{2}$
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4\frac{1}{2}} = 1$
dus $x^2 + 2y^2 = 9$

e. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
dus $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ door $(2, \sqrt{2})$
$4b^2 + 2a^2 = a^2b^2$
$c = 3$ en $c^2 = a^2 - b^2$ geeft $a^2 - b^2 = 9$
$a^2 = b^2 + 9$
dus $4b^2 + 2(b^2 + 9) = (b^2 + 9)b^2$
$4b^2 + 2b^2 + 18 = b^4 + 9b^2$
$b^4 + 3b^2 - 18 = 0$
$(b^2 - 3)(b^2 + 6) = 0$
$b^2 = 3 \quad \vee \quad b^2 = -6$ k.n.
$a^2 = b^2 + 9 = 3 + 9 = 12$
dus $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$
dus $x^2 + 4y^2 = 12$

**Opgave 28:**

a. het andere brandpunt is het middelpunt van de richtcirkel, dus $(-3,0)$
de brandpunten zijn dus $(3,0)$ en $(-3,0)$
dus het middelpunt van de ellips is het midden van $F_1F_2$ , dus $(0,0)$

b. $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r = 10$

ook geldt: $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$
dus $2a=10$
dus $a=5$
$c=3$
$c^2=a^2-b^2$
$b^2=a^2-c^2=25-9=16$
$b=4$

**Opgave 29:**
$x^2+y^2-8y-84=0$
$x^2+(y-4)^2-16-84=0$
$x^2+(y-4)^2=100$
dit is de richtcirkel, dus $M=(0,4)$ en $r=10$
$d(P,F)+d(P,M)=r=10$
$d(P,F)+d(P,M)=2b$
dus $2b=10$
$b=5$
$c=4$
$c^2=b^2-a^2$
$a^2=b^2-c^2=25-16=9$
dus $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

**Opgave 30:**
a. $a^2=10$ dus $(\sqrt{10},0)$ en $(-\sqrt{10},0)$
$b^2=6$ dus $(0,\sqrt{6})$ en $(0,-\sqrt{6})$
b. $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$
links en rechts vermenigvuldigen met 30 geeft: $3x^2+5y^2=30$
c. $3x^2+5(2x-3\tfrac{1}{2})^2=30$
$3x^2+20x^2-70x+61\tfrac{1}{4}=30$
$23x^2-70x+31\tfrac{1}{4}=0$
$x=\frac{70\pm\sqrt{2025}}{46}=\frac{70\pm 45}{46}$
$x=\frac{70+45}{46}=2\tfrac{1}{2} \quad \vee \quad x=\frac{70-45}{46}=\frac{25}{46}$
$y=1\tfrac{1}{2} \qquad y=-2\tfrac{19}{46}$
dus $(2\tfrac{1}{2},1\tfrac{1}{2})$ en $(\tfrac{25}{46},-2\tfrac{19}{46})$

**Opgave 31:**
a. door $(1,2)$ dus $p+4q=35$
door $(3,1)$ dus $9p+q=35$
$p=-4q+35$

$9(-4q+35)+q=35$
$-36q+315+q=35$
$-35q=-270$
$q=8$
$p=-4\cdot 8+35=3$

b. $3x^2+8y^2=35$

$$\frac{3x^2}{35}+\frac{8y^2}{35}=1$$

$$\frac{x^2}{\frac{35}{3}}+\frac{y^2}{\frac{35}{8}}=1$$

dus $a^2=\frac{35}{3}$ en $b^2=\frac{35}{8}$

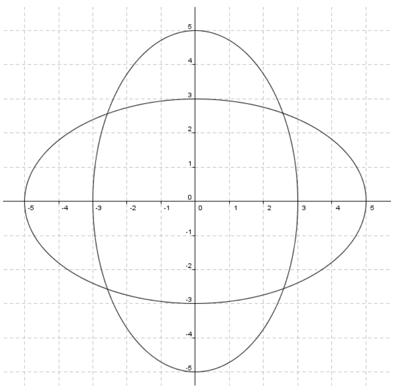
$a^2>b^2$ dus $c^2=a^2-b^2=\frac{35}{3}-\frac{35}{8}=\frac{175}{24}$

$c=\sqrt{\frac{175}{24}}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{7\cdot 6}=\frac{5}{12}\sqrt{42}$

dus de brandpunten zijn $(\frac{5}{12}\sqrt{42},0)$ en $(-\frac{5}{12}\sqrt{42},0)$

**Opgave 32:**

a.



b. vervang $x$ door $x-5$ en $y$ door $y-6$
van $9x^2+25y^2=225$ zijn de toppen $(-5,0)$, $(5,0)$, $(0,3)$, $(0,-3)$
dus van $9(x-5)^2+25(y-6)^2=225$ zijn de toppen $(0,6)$, $(10,6)$, $(5,9)$, $(5,3)$

c. $25x^2+9y^2=225 \xrightarrow{T(5,6)} 25(x-5)^2+9(y-6)^2=225$
van $25x^2+9y^2=225$ zijn de toppen $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,5)$, $(0,-5)$ en de brandpunten $(0,4)$ en $(0,-4)$
dus van $25(x-5)^2+9(y-6)^2=225$ zijn de toppen $(2,6)$, $(8,6)$, $(5,11)$, $(5,1)$ en de brandpunten $(5,2)$ en $(5,10)$

**Opgave 33:**

$9x^2+4y^2=36$ dus $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

$b^2>a^2$ dus $c^2=b^2-a^2=9-4=5$

dus $c=\sqrt{5}$ , dus de brandpunten zijn $(0,\sqrt{5})$ en $(0,-\sqrt{5})$

**Opgave 34:**

a. $5x^2 + y^2 = 5 \xrightarrow{T(2,-3)} 5(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$

$5x^2 + y^2 = 5$ ofwel $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ heeft als toppen: $(-1,0), (1,0), (0,-\sqrt{5}), (0,\sqrt{5})$

$b^2 > a^2$ dus $c^2 = b^2 - a^2 = 5 - 1 = 4$ dus $c = 2$ , dus brandpunten $(0,-2)$ en $(0,2)$.

$5(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ heeft als toppen: $(1,-3), (3,-3), (2,-3-\sqrt{5}), (2,-3+\sqrt{5})$ en brandpunten $(2,-5)$ en $(2,-1)$

b. $4x^2 + 25y^2 + 16x - 84 = 0$

$4(x^2 + 4x) + 25y^2 = 84$

$4(x+2)^2 - 16 + 25y^2 = 84$

$4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$

$4x^2 + 25y^2 = 100 \xrightarrow{T(-2,0)} 4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$

$4x^2 + 25y^2 = 100$ ofwel $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ heeft als toppen $(-5,0), (5,0), (0,-2), (0,2)$

$a^2 > b^2$ dus $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21$ dus $c = \sqrt{21}$ , dus de brandpunten zijn $(-\sqrt{21},0)$ en $(\sqrt{21},0)$

$4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$ heeft als toppen: $(-7,0), (3,0), (-2,-2), (-2,2)$ en als brandpunten $(-2-\sqrt{21},0)$ en $(-2+\sqrt{21},0)$

c. $9x^2 + 10y^2 - 80y - 200 = 0$

$9x^2 + 10(y^2 - 8y) - 200 = 0$

$9x^2 + 10((y-4)^2 - 16) - 200 = 0$

$9x^2 + 10(y-4)^2 - 160 - 200 = 0$

$9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$

$9x^2 + 10y^2 = 360 \xrightarrow{T(0,4)} 9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$

$9x^2 + 10y^2 = 360$ ofwel $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ heeft als toppen $(-2\sqrt{10},0), (2\sqrt{10},0), (0,-6), (0,6)$

$a^2 > b^2$ dus $c^2 = a^2 - b^2 = 40 - 36 = 4$, dus $c = 2$ dus de brandpunten zijn $(-2,0)$ en $(2,0)$

$9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$ heeft als toppen: $(-2\sqrt{10},4), (2\sqrt{10},4), (0,-2), (0,10)$ en als brandpunten $(-2,4)$ en $(2,4)$

d. $36x^2 + 11y^2 + 72x - 66y = 261$

$36(x^2 + 2x) + 11(y^2 - 6y) = 261$

$36((x+1)^2 - 1) + 11((y-3)^2 - 9) = 261$

$36(x+1)^2 - 36 + 11(y-3)^2 - 99 = 261$

$36(x+1)^2 + 11(y-3)^2 = 396$

$36x^2 + 11y^2 = 396 \xrightarrow{T(-1,3)} 36(x+1)^2 + 11(y-3)^2 = 396$

$36x^2 + 11y^2 = 396$ ofwel $\dfrac{x^2}{11} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ heeft als toppen $(-\sqrt{11},0), (\sqrt{11},0), (0,-6), (0,6)$

$b^2 > a^2$ dus $c^2 = b^2 - a^2 = 36 - 11 = 25$ dus $c = 5$ dus de brandpunten zijn $(0,-5)$ en $(0,5)$

$36(x+1)^2+11(y-3)^2=396$ heeft als toppen $(-1-\sqrt{11},3)$, $-1+(\sqrt{11},3)$, $(-1,-9)$, $(-1,3)$ en als brandpunten $(-1,-2)$ en $(-1,8)$

**<u>Opgave 35:</u>**

a. $16x^2+25y^2-64x+50y=311$

$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$

$16((x-2)^2-4)+25((y+1)^2-1)=311$

$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$

$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$

$16x^2+25y^2=400 \xrightarrow{T(2,-1)} 16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$

$16x^2+25y^2=400$ ofwel $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

$a^2>b^2$ dus $c^2=a^2-b^2=25-16=9$ dus $c=3$

brandpunten $(-,3,0)$ en $(3,0)$

dus $16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$ heeft als brandpunten $(-1,-1)$ en $(5,-1)$

lange as: $y=-1$

$k:\quad x=5$

$k$ snijden met de ellips:

$16(5-2)^2+25(y+1)^2=400$

$144+25(y+1)^2=400$

$25(y+1)^2=256$

$(y+1)^2=\frac{256}{25}$

$y+1=\frac{16}{5} \quad\vee\quad y+1=-\frac{16}{5}$

$y=\frac{11}{5} \quad\vee\quad y=-\frac{21}{5}$

$AB=\frac{11}{5}--\frac{21}{5}=\frac{32}{5}$

b. $y_C=y_D=0$

$16x^2-64x=311$

$16x^2-64x-311=0$

$x=\dfrac{64\pm\sqrt{24000}}{32}=\dfrac{64\pm 40\sqrt{15}}{32}$

$x=2\pm 1\frac{1}{4}\sqrt{15}$

$CD=2+1\frac{1}{4}\sqrt{15}-(2-1\frac{1}{4}\sqrt{15})=2\frac{1}{2}\sqrt{15}$

c. $x=0$

$25y^2+50y=311$

$25y^2+50y-311=0$

$y=\dfrac{-50\pm\sqrt{33600}}{50}=\dfrac{-50\pm 40\sqrt{21}}{50}$

$y=-1\pm\frac{4}{5}\sqrt{21}$

lengte koorde $=-1+\frac{4}{5}\sqrt{21}-(-1-\frac{4}{5}\sqrt{21})=1\frac{3}{5}\sqrt{21}$

**Opgave 36:**

a. $10x^2+ay^2-80x+4ay+160-6a=0$

$10(x^2-8x)+a(y^2+4y)+160-6a=0$

$10((x-4)^2-16)+a((y+2)^2-4)+160-6a=0$

$10(x-4)^2-160+a(y+2)^2-4a+160-6a=0$

$10(x-4)^2+a(y+2)^2=10a$

$\frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1$

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{10}=1 \xrightarrow{T(4,-2)} \frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1$

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{10}=1$ heeft als toppen: $(-\sqrt{a},0),(\sqrt{a},0),(0,-\sqrt{10}),(0,\sqrt{10})$

$\frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1$ heeft als toppen:

$(4-\sqrt{a},-2), 4+(\sqrt{a},-2), (4,-2-\sqrt{10}), (4,-2+\sqrt{10})$

top$=(7,-2)$

$4-\sqrt{a}=7 \quad \vee \quad 4+\sqrt{a}=7$

$-\sqrt{a}=3 \quad \vee \quad \sqrt{a}=3$

k.n. $\quad a=9$

b. als $a>10$ dan $c^2=a-10$ dus $c=\sqrt{a-10}$

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{10}=1$ heeft als brandpunten $(\sqrt{a-10},0)$ en $(-\sqrt{a-10},0)$

dus $\frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1$ heeft als brandpunten: $(4+\sqrt{a-10},-2)$ en $(4-\sqrt{a-10},-2)$

$4+\sqrt{a-10}=7 \quad \vee \quad 4-\sqrt{a-10}=7$

$\sqrt{a-10}=3 \quad \vee \quad -\sqrt{a-10}=3$

$a-10=9$ $\quad$ k.n.

$a=19$

c. als $a<10$ dan $c^2=10-a$ dus $c=\sqrt{10-a}$

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{10}=1$ heeft als brandpunten $(0,\sqrt{10-a})$ en $(0,-\sqrt{10-a})$

dus $\frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1$ heeft als brandpunten $(4,-2+\sqrt{10-a})$ en $(4,2-\sqrt{10-a})$

brandpunt $(4,0)$ dus $-2+\sqrt{10-a}=0$

$\sqrt{10-a}=2$

$10-a=4$

$a=6$

**Opgave 37:**

a. $2^2+4\cdot\sqrt{3}^2=4+4\cdot 3=16$

b. punt $P$ ligt op $y=\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}$

c. $y=\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}=\sqrt{u}$ met $u=-\frac{1}{4}x^2+4$ dus $u'=-\frac{1}{2}x$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}\cdot -\frac{1}{2}x=\frac{-x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}=-\frac{x}{4y}$$

$$rc=\frac{-2}{4\sqrt{3}}=\frac{-2}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{12}=-\frac{1}{6}\sqrt{3}$$

$y=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot x+b$ door $(2,\sqrt{3})$

$\sqrt{3}=-\frac{1}{3}\sqrt{3}+b$

$b=1\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$y=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot x+1\frac{1}{3}\sqrt{3}$

d. $y=-\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}=-\sqrt{u}$ met $u=-\frac{1}{4}x^2$ dus $u'=-\frac{1}{2}x$

$$y'=\frac{-1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{-1}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}\cdot -\frac{1}{2}x=\frac{x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}=\frac{-x}{-4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}=-\frac{x}{4y}$$

**Opgave 38:**

a. als $y_A<0$ dan ligt $A$ op $y=-\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2+b^2}$

$y=-\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2+b^2}=-\sqrt{u}$ met $u=-\frac{b^2}{a^2}x^2+b^2$ dus $u'=-\frac{2b^2}{a^2}x$

$$y'=\frac{-1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{-1}{2\sqrt{u}}\cdot -\frac{2b^2}{a^2}x=\frac{b^2x}{a^2\cdot\sqrt{u}}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

$k:\quad y-y_A=-\frac{b^2x_A}{a^2y_A}(x-x_A)$

$a^2y_A\cdot y-a^2{y_A}^2=-b^2x_A\cdot x+b^2{x_A}^2$

$b^2x_A\cdot x+a^2y_A\cdot y=b^2{x_A}^2+a^2{y_A}^2$

$b^2x_A\cdot x+a^2y_A\cdot y=a^2b^2$

$\frac{x_A\cdot x}{a^2}+\frac{y_A\cdot y}{b^2}=1$

b. als $y_A=0$ dan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$

dus $x^2=a^2$

dus $x=a \quad\vee\quad x=-a$

de raakpunten zijn $(-a,0)$ en $(a,0)$ , twee toppen van de ellips

raaklijn in $(-a,0)$ is: $\frac{-a\cdot x}{a^2}+\frac{0\cdot y}{b^2}=1$ ofwel $x=-a$

raaklijn in $(a,0)$ is: $\frac{a\cdot x}{a^2}+\frac{0\cdot y}{b^2}=1$ ofwel $x=a$

dus het klopt want in deze toppen is de raaklijn verticaal

**Opgave 39:**

a. $2\cdot 3x+5\cdot -y=23$

$6x-5y=23$

b. $\frac{4x}{18}+\frac{1y}{9}=1$

$2x+y=9$

c. raaklijn $k$ in $(2,5)$ is: $k:\quad 7\cdot 2x+2\cdot 5y=78$

$14x+10y=78$

$\overrightarrow{n_k}=\begin{pmatrix}14\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

dus $\overrightarrow{n_m}=\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$

dus $m:\quad 5x-7y=c$ door $(2,5)$

$m:\quad 5x-7y=-25$

d. raaklijn $l$ in $(3,2)$ is: $l:\quad \frac{3x}{15}+\frac{2y}{10}=1$

$l:\quad 3x+3y=15$

$\overrightarrow{n_l}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

dus $\overrightarrow{n_n}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

dus $n:\quad x-y=c$ door $(3,2)$

$n:\quad x-y=1$

**Opgave 40:**

a. stel het raakpunt is $A(x_A,y_A)$

dan is de raaklijn: $2x_A\cdot x+a^2y_A\cdot y=16$

de raaklijn is ook $x-y=8$ ofwel $2x-2y=16$

dus $\begin{cases}2x_A=2\\a^2y_A=-2\end{cases}$

dus $x_A=1$

hieruit volgt dat $y_A=-7$ (want $A$ ligt op $x-y=8$)

dus $-7a^2=-2$

dus $a^2=\frac{2}{7}$

b. stel het raakpunt is $A(x_A,y_A)$

dan is de raaklijn: $b^2x_A\cdot x+8y_A\cdot y=88$

de raaklijn is ook $5x+2y=22$ ofwel $20x+8y=88$

dus $\begin{cases}b^2x_A=20\\8y_A=8\end{cases}$

dus $y_A=1$

hieruit volgt dat $x_A=4$ (want $A$ ligt op $5x+2y=22$)

dus $4b^2=20$

dus $b^2=5$

**Opgave 41:**

a. raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is: $x_A \cdot x + 2y_A \cdot y = 18$

de raaklijn is ook $y = 2x + b$ ofwel $2x - y = -b$

dus $\frac{x_A}{2} = \frac{2y_A}{-1} = \frac{18}{-b}$

b. uit $\frac{x_A}{2} = \frac{2y_A}{-1}$ volgt $-x_A = 4y_A$ dus $y_A = -\frac{1}{4}x_A$

invullen in de ellips geeft:

$x_A{}^2 + 2(-\frac{1}{4}x_A)^2 = 18$

$x_A{}^2 + \frac{1}{8}x_A{}^2 = 18$

$\frac{9}{8}x_A{}^2 = 18$

$x_A{}^2 = 16$

$x_A = 4 \quad \vee \quad x_A = -4$

$y_A = -1 \qquad y_A = 1$

c. als $x_A = 4$ dan $\frac{4}{2} = \frac{18}{-b}$ dus $b = -9$

als $x_A = -4$ dan $\frac{-4}{2} = \frac{18}{-b}$ dus $b = 9$

**Opgave 42:**

a. raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is: $2x_A \cdot x + 5y_A \cdot y = 38$

de raaklijn is ook: $y = -\frac{3}{5}x + b$ ofwel $3x + 5y = 5b$

dus $\frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{5} = \frac{38}{5b}$

dus $2x_A = 3y_A$

dus $x_A = 1\frac{1}{2}y_A$

invullen in de ellips geeft:

$2(1\frac{1}{2}y_A)^2 + 5y_A{}^2 = 38$

$4\frac{1}{2}y_A{}^2 + 5y_A{}^2 = 38$

$9\frac{1}{2}y_A{}^2 = 38$

$y_A{}^2 = 4$

$y_A = 2 \quad \vee \quad y_A = -2$

$x_A = 3 \qquad x_A = -3$

dus de raakpunten zijn: $(3,2)$ en $(-3,-2)$

b. dus voor de raaklijnen geldt: $rc = -\frac{1}{\frac{-5}{3}} = \frac{3}{5}$

dus de raaklijn is: $y = \frac{3}{5}x + b$ ofwel $3x - 5y = -5b$

dus $\frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{-5}$

dus $2x_A = -3y_A$

dus $x_A = -1\frac{1}{2}y_A$

invullen in de ellips geeft:

$2(-1\tfrac{1}{2}y_A)^2 + 5{y_A}^2 = 38$

$4\tfrac{1}{2}{y_A}^2 + 5{y_A}^2 = 38$

$9\tfrac{1}{2}{y_A}^2 = 38$

${y_A}^2 = 4$

$y_A = 2 \quad \vee \quad y_A = -2$

$x_A = -3 \qquad x_A = 3$

dus de raakpunten zijn $(-3,2)$ en $(3,-2)$

**Opgave 43:**

a. raaklijn in $(-4,3)$ is: $3 \cdot -4x + 4 \cdot 3y = 84$

$-12x + 12y = 84$

$x - y = -7$

raaklijn in $(-1,-4\tfrac{1}{2})$ is: $3 \cdot -1x + 4 \cdot -4\tfrac{1}{2}y = 84$

$-3x - 18y = 84$

$x + 6y = -28$

b. $\begin{cases} x - y = -7 \\ x + 6y = -28 \quad - \end{cases}$

$-7y = 21$

$y = -3$

$x = -10$

dus $P(-10,-3)$

c. $y - 3 = \frac{-4\frac{1}{2} - 3}{-1 - -4}(x - -4)$

$y - 3 = -2\tfrac{1}{2}(x + 4)$

$y = 2\tfrac{1}{2}x - 7$

d. $3 \cdot -10 \cdot x + 4 \cdot -3 \cdot y = 84$

$-30x - 12y = 84$

$-12y = 30x + 84$

$y = -2\tfrac{1}{2}x - 7$

**Opgave 44:**

a. lijn *k* gaat door punt $P(x_P, y_P)$ buiten de ellips en raakt de ellips in het punt $A(x_A, y_A)$

dus $\dfrac{x_A \cdot x_P}{a^2} + \dfrac{y_A \cdot y_P}{b^2} = 1$

lijn *l* gaat door punt $P(x_P, y_P)$ buiten de ellips en raakt de ellips in het punt $B(x_B, y_B)$

dus $\dfrac{x_B \cdot x_P}{a^2} + \dfrac{y_B \cdot y_P}{b^2} = 1$

zowel *A* als *B* liggen op de lijn $\dfrac{x_P \cdot x}{a^2} + \dfrac{y_P \cdot y}{b^2} = 1$ en dit is een vergelijking van de poollijn van $P(x_P, y_P)$ ten opzichte van de ellips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

b. de poollijn van een punt $Q(x_Q, y_Q)$ ten opzichte van een ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ is de lijn $\frac{x_Q \cdot x}{a^2}+\frac{y_Q \cdot y}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{T(x_M, y_M)} \frac{(x-x_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$

$Q(x_Q, y_Q) \xrightarrow{T(x_M, y_M)} Q'(x_Q+x_M, y_Q+y_M)$ dus $x_P = x_Q + x_M$ en $y_P = y_Q + y_M$

ofwel $x_Q = x_P - x_M$ en $y_Q = y_P - y_M$

$\frac{x_Q \cdot x}{a^2}+\frac{y_Q \cdot y}{b^2}=1 \xrightarrow{T(x_M, y_M)} \frac{x_Q \cdot (x-x_M)}{a^2}+\frac{y_Q \cdot (y-y_M)}{b^2}=1$

dus de poollijn wordt: $\frac{(x_P-x_M)(x-x_M)}{a^2}+\frac{(y_P-y_M)(y-y_M)}{b^2}=1$

**Opgave 45:**

a. de poollijn van $A(8,-1)$ is $8x+8\cdot -1\cdot y=24$ ofwel $x-y=3$ dus $x=y+3$

de poollijn snijden met de ellips geeft:

$(y+3)^2+8y^2=24$

$y^2+6y+9+8y^2=24$

$9y^2+6y-15=0$

$y=\frac{-6\pm\sqrt{576}}{18}=\frac{-6\pm 24}{18}$

$y=1 \quad \vee \quad y=-1\frac{2}{3}$

$x=4 \qquad x=1\frac{1}{3}$

raaklijn in $(4,1)$ is: $4x+8y=24$ ofwel $x+2y=6$

raaklijn in $(1\frac{1}{3},-1\frac{2}{3})$ is: $1\frac{1}{3}x+8\cdot -1\frac{2}{3}y=24$ ofwel $x-10y=18$

b. $k:\quad (5-1)(x-1)+2(-4+3)(y+3)=18$

$4(x-1)-2(y+3)=18$

$4x-4-2y-6=18$

$4x-2y=28$

$2x-y=14$

c. $2x^2+5y^2+8x-30y+16=0$

$2(x^2+4x)+5(y^2-6y)+16=0$

$2((x+2)^2-4)+5((y-3)^2-9)+16=0$

$2(x+2)^2-8+5(y-3)^2-45+16=0$

$2(x+2)^2+5(y-3)^2=37$

raaklijn in $(-6,4)$ is: $2(-6+2)(x+2)+5(4-3)(y-3)=37$

$-8(x+2)+5(y-3)=37$

$-8x-16+5y-15=37$

$-8x+5y=68$

**Opgave 46:**

a. $k: \quad 4(-4-2)(x-2)+9(6-4)(y-4)=180$

$-24(x-2)+18(y-4)=180$

$-24x+48+18y-72=180$

$-24x+18y=204$

$4x-3y=-34$

b. raaklijn $m$ in $(-1{,}8)$ is: $4(-1-2)(x-2)+9(8-4)(y-4)=180$

$-12(x-2)+36(y-4)=180$

$-12x+24+36y-144=180$

$-12x+36y=300$

$-x+3y=25$

$\overrightarrow{n_m}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$n: \quad 3x+y=c$ door $(-1{,}8)$

$n: \quad 3x+y=5$

**Opgave 47:**

a. $15x+8y=106$ vermenigvuldig alles met 2

$30x+16y=212$

b. de raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is de lijn: $5x_A\cdot x+8y_A\cdot y=212$

dus $5x_A=30$ en $8y_A=16$

dus $x_A=6$ en $y_A=2$

dus $A(6{,}2)$

c. $l: \quad 55x+52y=-106$

$-110x-104y=212$

de raaklijn in $B(x_B, y_B)$ is de lijn $5x_B\cdot x+8y_B\cdot y=212$

dus $5x_B=-110$ en $8y_B=-104$

dus $x_B=-22$ en $y_B=-13$

dus $B(-22,-13)$

**Opgave 48:**

a. $k: \quad 2\cdot 8x+3\cdot -3y=30$

$16x-9y=30$

b. de poollijn van $B$ ten opzichte van de ellips is: $2\cdot -6x+3\cdot -1y=30$

dus $-12x-3y=30$

$-3y=12x+30$

$y=-4x-10$

de poollijn snijden met de ellips geeft:

$2x^2+3(-4x-10)^2=30$

$2x^2+3(16x^2+80x+100)=30$

$2x^2+48x^2+240x+300-30=0$

$50x^2+240x+270=0$

$5x^2+24x+27=0$

$x = \frac{-24 \pm \sqrt{36}}{10} = \frac{-24 \pm 6}{10}$

$x = -3 \quad \vee \quad x = -1\tfrac{4}{5}$

$y = 2 \qquad\quad y = -2\tfrac{4}{5}$

raaklijn in $(-3,2)$ is: $2 \cdot -3x + 3 \cdot 2y = 30$

$-6x + 6y = 30$

$x - y = -5$

raaklijn in $(-1\tfrac{4}{5}, -2\tfrac{4}{5})$ is: $2 \cdot -1\tfrac{4}{5}x + 3 \cdot -2\tfrac{4}{5}y = 30$

$-3\tfrac{3}{5}x - 8\tfrac{2}{5}y = 30$

$3x + 7y = -25$

c. $l: \quad y = -1\tfrac{1}{5}x + 2$

$1\tfrac{1}{5}x + y = 2$

$18x + 15y = 30$

de poollijn van $C(x_C, y_C)$ is de lijn: $2x_C \cdot x + 3y_C \cdot y = 30$

dus $2x_C = 18$ en $3y_C = 15$

dus $x_C = 9$ en $y_C = 5$

dus $C(9,5)$

**Opgave 49:**

de poollijn van $P(5,1)$ ten opzichte van de ellips is:

$p \cdot 5x + (1-q)(y-q) = 52$

$5px + (1-q)y - (1-q)q = 52$

$5px + (1-q)y = 52 + (1-q)q$

$5px + (1-q)y = 52 + q - q^2$

de poollijn is ook de lijn $15x - 4y = 32$

dus $\frac{5p}{15} = \frac{1-q}{-4} = \frac{52 + q - q^2}{32}$

dus $\frac{1-q}{-4} = \frac{52 + q - q^2}{32}$

$-4(52 + q - q^2) = 32(1-q)$

$-208 - 4q + 4q^2 = 32 - 32q$

$4q^2 + 28q - 240 = 0$

$q^2 + 7q - 60 = 0$

$(q+12)(q-5) = 0$

$q = -12 \quad \vee \quad q = 5$

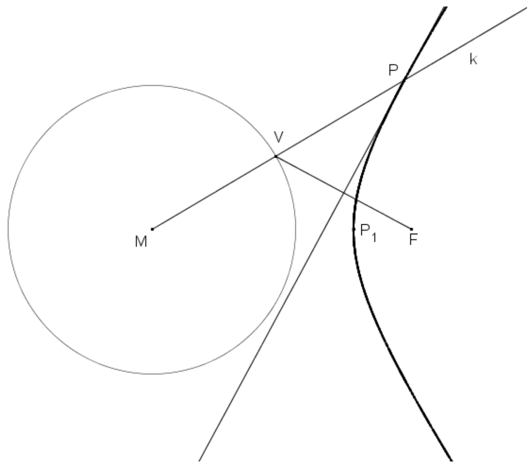
$q = -12$ geeft $\frac{5p}{15} = \frac{13}{-4}$ dus $q = -\tfrac{39}{4}$

$q = 5$ geeft $\frac{5p}{15} = \frac{-4}{-4}$ dus $p = 3$

## 11.3 De hyperbool

**Opgave 50:**

a.




b. voor ieder punt $P$ op de middelloodlijn van $FV$ geldt: $d(P,F) = d(P,V)$
punt $V$ ligt op de cirkel $c$ , dus $d(P,V) = d(P,c)$
dus $d(P,F) = d(P,c)$
dus punt $P$ ligt op de conflictlijn van punt $F$ en cirkel $c$

**Opgave 51:**

a. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$

$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$(cx - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

b. lijnstuk $F_1F_2$ heeft lengte $2c$
lijnstuk $F_1F_2$ snijdt de hyperbool in de punten $A$ en $B$
lijnstuk $AB$ heeft lengte $2a$
dus $2c > 2a$
dus $c > a$
dus $c^2 - a^2 = b^2$

c. stel $P(-x, y)$
$P$ ligt op de hyperbool dus geldt: $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$

$\sqrt{(-x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(-x-c)^2 + y^2} = 2a$

$$\sqrt{(-x+c)^2+y^2}=\sqrt{(-x-c)^2+y^2}+2a$$
$$(-x+c)^2+y^2=(-x-c)^2+y^2+4a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}+4a^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2+4a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}+4a^2$$
$$-4cx-4a^2=4a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}$$
$$cx+a^2=-a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}$$
$$(cx+a^2)^2=a^2((-x-c)^2+y^2$$
$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$
stel $b^2=c^2-a^2$

dus $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

dus $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

**Opgave 52:**

voor het punt $B$ op de hyperbool geldt: $d(B,F_1)-d(B,F_2)=2b+AF_1-BF_2=2b$

voor ieder punt $P$ op de bovenste tak van de hyperbool geldt: $\left|d(P,F_1)-d(P,F_2)\right|=2b$

$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}-\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2b$$
$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=\sqrt{x^2+(y-c)^2}+2b$$
$$x^2+(y+c)^2=x^2+(y-c)^2+4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}+4b^2$$
$$x^2+y^2+2cy+c^2=x^2+y^2-2cy+c^2+4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}+4b^2$$
$$4cy-4b^2=4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$
$$cy-b^2=b\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$
$$(cy-b^2)^2=b^2(x^2+(y-c)^2)$$
$$c^2y^2-2b^2cy+b^4=b^2(x^2+y^2-2cy+c^2)$$
$$c^2y^2-2b^2cy+b^4=b^2x^2+b^2y^2-2b^2cy+b^2c^2$$
$$-b^2x^2+c^2y^2-b^2y^2=b^2c^2-b^4$$
$$-b^2x^2+(c^2-b^2)y^2=b^2(c^2-b^2)$$
stel $a^2=c^2-b^2$

$$-b^2x^2+a^2y^2=b^2a^2$$
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$
voor ieder punt $P(x,-y)$ op de onderste tak van de hyperbool geldt:

$$\sqrt{x^2+(-y+c)^2}-\sqrt{x^2+(-y-c)^2}=2b$$

net zoals bij opgave 51c kunnen we dit ook herleiden tot $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

**Opgave 53:**

a. $a = 2 \quad c = 3$

dus $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

b. $b = 3 \quad c = 4$

dus $a^2 = c^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$

$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1$

c. $a = 4$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ door $(12,4)$

$\frac{144}{16} - \frac{16}{b^2} = 1$

$9 - \frac{16}{b^2} = 1$

$-\frac{16}{b^2} = -8$

$b^2 = 2$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{2} = 1$

d. $c = 5$

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - a^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{25 - a^2} = 1$ door $(4,3)$

$\frac{16}{a^2} - \frac{9}{25 - a^2} = 1$

$16 - \frac{9a^2}{25 - a^2} = a^2$

$16(25 - a^2) - 9a^2 = a^2(25 - a^2)$

$400 - 16a^2 - 9a^2 = 25a^2 - a^4$

$a^4 - 50a^2 + 400 = 0$

$(a^2 - 10)(a^2 - 40) = 0$

$a^2 = 10 \quad \vee \quad a^2 = 40$

$b^2 = 15 \qquad b^2 = -15$ kan niet

$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$

**Opgave 54:**

a. het middelpunt van de cirkel is $(-4,0)$

het middelpunt van de cirkel is ook één van de brandpunten van de hyperbool

zowel het brandpunt $(-4,0)$ als ook de top $(3,0)$ liggen op de $x$-as, dus $2a = r = 6$
dus $a = 3$
dus de afstand van het middelpunt tot de toppen van de hyperbool is 3
dus het middelpunt van de hyperbool is $(0,0)$ óf $(6,0)$
omdat $(-4,0)$ een brandpunt is kan $(6,0)$ niet het middelpunt van de hyperbool zijn
dus het punt $(0,0)$ is het middelpunt van de hyperbool
dus $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

b. $a = 3 \quad c = 4$
$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$
$b = \sqrt{7}$

**Opgave 55:**

$x^2 + y^2 + 10y - 39 = 0$
$x^2 + (y+5)^2 - 25 - 39 = 0$
$x^2 + (y+5)^2 = 64$
het middelpunt van de richtcirkel is $(0,-5)$
dus één van de brandpunten van de hyperbool is $(0,-5)$
zowel een brandpunt als een top liggen op de $y$-as, dus $2b = r = 8$
dus $b = 4$
$b = 4 \quad c = 5$
$a^2 = c^2 - b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$
dus $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$

**Opgave 56:**

a. $3x^2 - 5y^2 = 30$
$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$
$a^2 = 10$ dus $a = \sqrt{10}$
$b^2 = 6$ dus $6 = c^2 - 10$
dus $c^2 = 16$ dus $c = 4$
de toppen zijn $(\sqrt{10},0)$ en $(-\sqrt{10},0)$
de brandpunten zijn $(4,0)$ en $(-4,0)$

b. $x + y = 8$
$y = 8 - x$
$3x^2 - 5(8-x)^2 = 30$
$3x^2 - 5(64 - 16x + x^2) = 30$
$3x^2 - 320 + 80x - 5x^2 = 30$
$-2x^2 + 80x - 350 = 0$
$x^2 - 40x + 175 = 0$
$(x-5)(x-35) = 0$
$x = 5 \quad \vee \quad x = 35$

$x = 5$ geeft $y = 3$
$x = 35$ geeft $y = -27$
dus de snijpunten zijn $(5,3)$ en $(35,-27)$

**Opgave 57:**

a. $\begin{cases} 25p - 4q = 80 & \times 4 \\ 100p - 64q = 80 & \times 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 100p - 16q = 320 \\ 100p - 64q = 80 \quad - \end{cases}$

$48q = 240$
$q = 5$
$25p - 20 = 80$
$25p = 100$
$p = 4$

b. $4x^2 - 5y^2 = 80$

$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 20$ dus $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$b^2 = 16$ dus $16 = c^2 - 20$
dus $c^2 = 36$
dus $c = 6$
de toppen zijn $(2\sqrt{5},0)$ en $(-2\sqrt{5},0)$
de brandpunten zijn $(6,0)$ en $(-6,0)$

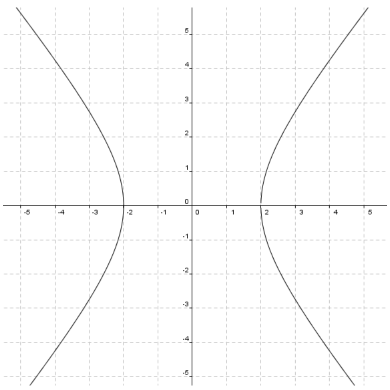
**Opgave 58:**

a. $3x^2 - 2y^2 = 12$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$

$a^2 = 4$ dus $a = 2$
dus de toppen zijn $(2,0)$ en $(-2,0)$

b.




c. $y = \frac{6}{5}x$

$3x^2 - 2(\frac{6}{5}x)^2 = 12$

$3x^2 - \frac{72}{25}x^2 = 12$

$\frac{3}{25}x^2 = 12$

$x^2 = 100$

$x = 10 \quad \vee \quad x = -10$

$y = 12 \qquad\quad y = -12$

dus de snijpunten zijn $(10,12)$ en $(-10,-12)$

d. $y = 2x$

$3x^2 - 2(2x)^2 = 12$

$3x^2 - 8x^2 = 12$

$-5x^2 = 12$ en deze vergelijking heeft geen oplossingen

**Opgave 59:**

a. één top van de hyperbool is $(a,0)$

voor asymptoot $l_1$ geldt: $y = \frac{b}{a}x$

$x = a$ geeft $y = \frac{b}{a} \cdot a = b$

dus de verticale afstand van de top $(a,0)$ tot de asymptoot is $b$

b. de asymptoten zijn de lijnen $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$

**Opgave 60:**

a. $a^2 = 16$ dus $a = 4$

$b^2 = 9$ dus $b = 3$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{3}{4}x$ en $y = -\frac{3}{4}x$

b. $16x^2 - 25y^2 = 400$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y}{16} = 1$$

$a^2 = 25$ dus $a = 5$

$b^2 = 16$ dus $b = 4$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{4}{5}x$ en $y = -\frac{4}{5}x$

c. $x^2 - 9y^2 + 9 = 0$

$x^2 - 9y^2 = -9$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1$$

$a^2 = 9$ dus $a = 3$

$b^2 = 1$ dus $b = 1$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{1}{3}x$ en $y = -\frac{1}{3}x$

d. $a = 4 \quad c = 5$

$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$b = 3$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{3}{4}x$ en $y = -\frac{3}{4}x$

e. $b = 2 \quad c = 3$

$a^2 = c^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$

$a = \sqrt{5}$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x = \frac{2}{5}\sqrt{5} \cdot x$ en $y = -\frac{2}{5}\sqrt{5} \cdot x$

**Opgave 61:**

a. $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

$a = 2b$

$\frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$x^2 - 4y^2 = 4b^2$ door $(10,4)$

$100 - 64 = 4b^2$

$4b^2 = 36$

$b^2 = 9$

$b = 3$

$a = 6$

b. $9 = c^2 - 36$

$c^2 = 45$

$c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

de toppen zijn: $(6,0)$ en $(-6,0)$

de brandpunten zijn: $(3\sqrt{5},0)$ en $(-3\sqrt{5},0)$

**Opgave 62:**

a. als $b = a$ dan is $rc_1 = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$ en $rc_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{a}{a} = -1$

$rc_1 \cdot rc_2 = 1 \cdot -1 = -1$ dus de twee asymptoten staan loodrecht op elkaar

b. $x^2 - y^2 = 2$

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

$a^2 = b^2 = 2$

dus $a = b = \sqrt{2}$ , dus $h_1$ is een orthogonale hyperbool

$2 = c^2 - 2$

$c^2 = 4$ dus $c = 2$

de toppen zijn: $(\sqrt{2},0)$ en $(-\sqrt{2},0)$

de brandpunten zijn: $(2,0)$ en $(-2,0)$

c. $a = 3$ dus $b = 3$

$9 = c^2 - 9$

$c^2 = 18$ dus $c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

de brandpunten zijn: $(3\sqrt{2},0)$ en $(-3\sqrt{2},0)$

d. $a = b$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ dus $x^2 - y^2 = a^2$ door $(4,1)$

$16 - 1 = a^2$

$a^2 = 15$ dus $a = \sqrt{15}$

$15 = c^2 - 15$

$c^2 = 30$ dus $c = \sqrt{30}$

**Opgave 63:**

a. $d(P,F) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{x} - 2\right)^2}$

b. het middelpunt $M$ van de cirkel is: $(-2,-2)$

$d(P,c) = d(P,M) - d(M,c) = d(P,M) - 4 = \sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2)^2\right)} - 4$

c. er geldt: $d(P,F) = d(P,c) = d(P,M) - 4$
dus $d(P,M) - d(P,c) = 4$
dus $P$ ligt op een tak van een hyperbool

d. gegeven is de cirkel: $c_2$ : $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$
het middelpunt $M$ van deze cirkel is: $(2,2)$
stel $P(x, \frac{2}{x})$ en $F(-2,-2)$ dan geldt:

$d(P,F) = \sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2}$

$d(P,c) = d(P,M) - d(M,c) = d(P,M) - 4 = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{x} - 2\right)^2} - 4$

neem $y_1 = \sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2}$ en $y_2 = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{x} - 2)\right)^2} - 4$

de tabel geeft gelijke waarden voor $y_1$ en $y_2$
dus $d(P,F) = d(P,c) = d(P,M) - 4$
dus $d(P,M0 - d(P,F) = 4$
dus $P$ ligt op een tak van een hyperbool

**Opgave 64:**

a. $\frac{b}{a} = 3$ dus $b = 3a$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9a^2} = 1$

$9x^2 - y^2 = 9a^2$ door $(3,3\sqrt{5})$

$81 - 45 = 9a^2$

$9a^2 = 36$

$a^2 = 4$

$a = 2$

$b = 6$

$h_1$ : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$

b. $36 = c^2 - 4$

$c^2 = 40$

$c = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

dus de brandpunten zijn $(2\sqrt{10},0)$ en $(-2\sqrt{10},0)$

c. $a = b = 2\sqrt{10}$

$h_2: \quad \frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{40} = 1$

**<u>Opgave 65:</u>**

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$-a^2y^2 = -b^2x^2 + a^2b^2$

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$

als $y_A > 0$ dan ligt $A$ op de hyperbooltak: $y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}$

neem $y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \sqrt{u}$ met $u = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$ dus $u' = \frac{2b^2}{a^2}x$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{2b^2}{a^2}x = \frac{b^2x}{a^2\sqrt{u}} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$$k: \quad y - y_A = \frac{b^2x_A}{a^2y_A} \cdot (x - x_A)$$

$a^2y_Ay - a^2{y_A}^2 = b^2x_Ax - b^2{x_A}^2$

$-b^2x_Ax + a^2y_Ay = -b^2{x_A}^2 + a^2{y_A}^2$

$b^2x_Ax - a^2y_Ay = b^2{x_A}^2 - a^2{y_A}^2$

$b^2x_Ax - a^2y_Ay = a^2b^2$

$\frac{x_Ax}{a^2} - \frac{y_Ay}{b^2} = 1$

als $y_A < 0$ dan ligt $A$ op de hyperbooltak $y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}$

neem $y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = -\sqrt{u}$ met $u = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$ dus $u' = \frac{2b^2}{a^2}x$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{-1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{2b^2}{a^2}x = \frac{-b^2x}{a^2\sqrt{u}} = \frac{-b^2x}{a^2 \cdot -y} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

dit levert voor $k$ dezelfde vergelijking op, dus $k: \quad \frac{x_Ax}{a^2} - \frac{y_Ay}{b^2} = 1$

**<u>Opgave 66:</u>**

a. $k: \quad 3 \cdot 3 \cdot x - 5 \cdot -1 \cdot y = 22$

$9x + 5y = 22$

b. $\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{40} = 1$ ofwel $40x^2 - 14y^2 = 560$

raaklijn $m$ in punt $(-7,-10)$ is: $40 \cdot -7 \cdot x - 14 \cdot -10 \cdot y = 560$

$-280x + 140y = 560$

$-2x + y = 4$

$\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$n: \quad x + 2y = c$ door $(-7,-10)$

$n: \quad x + 2y = -27$

**Opgave 67:**

a. de poollijn van $A(2,-2)$ ten opzichte van de hyperbool is: $2x - 8 \cdot -2 \cdot y = 28$

dus $2x + 16y = 28$

dus $x + 8y = 14$

dus $x = 14 - 8y$

de snijpunten van de poollijn met de hyperbool zijn:

$(14 - 8y)^2 - 8y^2 = 28$

$196 - 224y + 64y^2 - 8y^2 = 28$

$56y^2 - 224y + 168 = 0$

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$(y-1)(y-3) = 0$

$y = 1 \quad \vee \quad y = 3$

$x = 6 \qquad x = -10$

raaklijn in $(6,1)$ is: $6x - 8 \cdot 1y = 28$ ofwel $3x - 4y = 14$

raaklijn in $(-10,3)$ is: $-10x - 8 \cdot 3y = 28$ ofwel $5x + 12y = -14$

b. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ ofwel $2x^2 - 3y^2 = 24$

de poollijn van $B(1,-1)$ ten opzichte van de hyperbool is: $2 \cdot 1 \cdot x - 3 \cdot -1 \cdot y = 24$

dus $2x + 3y = 24$

dus $2x = 24 - 3y$

dus $x = 12 - 1\frac{1}{2}y$

de snijpunten van deze poollijn met de hyperbool zijn:

$2(12 - 1\frac{1}{2}y)^2 - 3y^2 = 24$

$2(144 - 36y + 2\frac{1}{4}y^2) - 3y^2 = 24$

$288 - 72y + 4\frac{1}{2}y^2 - 3y^2 = 24$

$1\frac{1}{2}y^2 - 72y + 264 = 0$

$y^2 - 48y + 176 = 0$

$(y-4)(y-44) = 0$

$y = 4 \quad \vee \quad y = 44$

$x = 6 \qquad x = -54$

raaklijn in $(6,4)$ is: $2 \cdot 6 \cdot x - 3 \cdot 4 \cdot y = 24$ ofwel $x - y = 2$

raaklijn in $(-54,44)$ is: $2 \cdot -54 \cdot x - 3 \cdot 44 \cdot y = 24$ ofwel $9x + 11y = -2$

**Opgave 68:**

a. de raaklijn in $(x_A, y_A)$ is: $x_A x - a^2 y_A y = -80$

de raaklijn is ook $x + y = 10$ ofwel $-8x - 8y = -80$

dus $x_A = -8$

dan $y_A = 18$ dus $a^2 \cdot 18 = 8$

dus $a^2 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

b. de raaklijn in $(x_B, y_B)$ is: $b^2 x_B x - 8y_B y = 100$

de raaklijn is ook $3x - 4y = 10$ ofwel $30x - 40y = 100$

dus $8y_B = 40$

dus $y_B = 5$

dan $3x_B - 20 = 10$

dus $3x_B = 30$

dus $x_B = 10$

dus $b^2 \cdot 10 = 30$

dus $b^2 = 3$

**Opgave 69:**

a. voor *k* en *l* geldt: $y = x + b$ ofwel $-x + y = b$

de raaklijn in $(x_A, y_A)$ is: $x_A x - 3y_A y = 24$

de raaklijn is ook: $-x + y = b$

dus $\dfrac{x_A}{-1} = \dfrac{-3y_A}{1} = \dfrac{24}{b}$

dus $x_A = 3y_A$

dus $(3y_A)^2 - 3{y_A}^2 = 24$

$9{y_A}^2 - 3{y_A}^2 = 24$

$6{y_A}^2 = 24$

${y_A}^2 = 4$

$y_A = -2 \quad \vee \quad y_A = 2$

$x_A = -6 \qquad x_A = 6$

dus de raakpunten zijn $(-6,-2)$ en $(6,2)$

b. als een lijn met $rc = -\frac{5}{3}$ de hyperbool loodrecht snijdt, dan geldt in het snijpunt voor de raaklijn $rc = \frac{3}{5}$

dus de raaklijn is: $y = \frac{3}{5}x + b$ ofwel $-3x + 5y = 5b$

de raaklijn in $(x_B, y_B)$ is: $x_B x - 3y_B y = 24$

dus $\dfrac{x_B}{-3} = \dfrac{-3y_B}{5} = \dfrac{24}{5b}$

dus $5x_B = 9y_B$

$x_B = \frac{9}{5} y_B$

dus $(\frac{9}{5} y_B)^2 - 3{y_B}^2 = 24$

$\frac{81}{25} {y_B}^2 - 3{y_B}^2 = 24$

$\frac{6}{25} {y_B}^2 = 24$

${y_B}^2 = 100$

$y_B = 10 \quad \vee \quad y_B = -10$

$x_B = 18 \qquad x_B = -18$

dus de raakpunten zijn $(18,10)$ en $(-18,-10)$

**Opgave 70:**

a. $3x^2 - y^2 = 71$

$\frac{x^2}{\frac{71}{3}} - \frac{y^2}{71} = 1$

$a^2 = \frac{71}{3}$ dus $a = \sqrt{\frac{71}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{213}$

$b^2 = 71$

$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{71}{3} + 71 = 94\frac{2}{3}$ dus $c = \sqrt{94\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{284}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{213}$

de toppen zijn: $(\frac{1}{3}\sqrt{213},0)$ en $(-\frac{1}{3}\sqrt{213},0)$

de brandpunten zijn: $(\frac{2}{3}\sqrt{213},0)$ en $(-\frac{2}{3}\sqrt{213},0)$

b. $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{71}}{\sqrt{\frac{71}{3}}} = \frac{\sqrt{71}}{\frac{\sqrt{71}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

de asymptoten zijn: $y = x\sqrt{3}$ en $y = -x\sqrt{3}$

c. $k: \quad 3 \cdot 5 \cdot x - -2 \cdot y = 71$

$k: \quad 15x + 2y = 71$

d. raaklijn in $B(12,19)$ is: $m: \quad 3 \cdot 12 \cdot x - 19 \cdot y = 71$

$m: \quad 36x - 19y = 71$

$\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} 36 \\ -19 \end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n} = \begin{pmatrix} 19 \\ 36 \end{pmatrix}$

$n: \quad 19x + 36y = c$ door $B(12,19)$

$n: \quad 19x + 36y = 912$

e. de lijnen $p$ en $q$ zijn van de vorm: $y = 2x + b$

dus $2x - y = -b$

de raaklijn in $C(x_C, y_C)$ is: $3 \cdot x_C \cdot x - y_C \cdot y = 71$

$\frac{3x_C}{2} = \frac{-y_C}{-1} = \frac{71}{-b}$

$-2y_C = -3x_C$

$y_C = 1\frac{1}{2}x_C$

$3x_C{}^2 - (1\frac{1}{2}y_C)^2 = 71$

$3x_C{}^2 - 2\frac{1}{4}x_C{}^2 = 71$

$\frac{3}{4}x_C{}^2 = 71$

$x_C{}^2 = \frac{284}{3}$

$x_C = \sqrt{\frac{284}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{213} \quad \vee \quad x_C = -\frac{2}{3}\sqrt{213}$

**Opgave 71:**

de poollijn van $P(1,\frac{1}{5})$ ten opzichte van de hyperbool $x^2 - a^2y^2 = 6$ is: $1 \cdot x - a^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot y = 6$

dus $x - \frac{1}{5}a^2 y = 6$

de poollijn is ook: $x - 2y = c$

dus $-\frac{1}{5}a^2=-2 \quad \wedge \quad c=6$

dus $a^2=10 \quad \wedge \quad c=6$

dus de hyperbool is: $x^2-10y^2=6$

de poollijn is: $x-2y=6$ dus $x=2y+6$

de snijpunten van de poollijn en de hyperbool zijn:

$(2y+6)^2-10y^2=6$

$4y^2+24y+36-10y^2=6$

$-6y^2+24y+30=0$

$y^2-4y-5=0$

$(y+1)(y-5)=0$

$y=-1 \quad \vee \quad y=5$

$x=4 \qquad\quad x=16$

dus de snijpunten zijn: $(4,-1)$ en $(16,5)$

**<u>Opgave 72:</u>**

a. $4x^2-y^2+8x+4y-15=0$

$4(x^2+2x)-(y^2-4y)-15=0$

$4((x+1)^2-1)-((y-2)^2-4)-15=0$

$4(x+1)^2-4-(y-2)^2+4-15=0$

$4(x+1)^2-(y-2)^2=15$

$4x^2-y^2=15 \xrightarrow{T(-1,2)} 4(x+1)^2-(y-2)^2=15$

$4x^2-y^2=15$ ofwel $\frac{x^2}{\frac{15}{4}}-\frac{y^2}{15}=1$

$a^2=\frac{15}{4} \qquad b^2=15$ dus $c^2=a^2+b^2=\frac{15}{4}+15=18\frac{3}{4}$

dus $a=\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{15}$ en $c=\sqrt{18\frac{3}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

van $\frac{x^2}{\frac{15}{4}}-\frac{y^2}{15}=1$ is het middelpunt $(0,0)$ , de toppen zijn $(\frac{1}{2}\sqrt{15},0)$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{15},0)$

en de brandpunten zijn $(\frac{5}{2}\sqrt{3},0)$ en $(-\frac{5}{2}\sqrt{3},0)$

dus van $4(x+1)^2-(y-2)^2=15$ is het middelpunt $(-1,2)$ , zijn de toppen:

$(-1+\frac{1}{2}\sqrt{15},2)$ en $(-1-\frac{1}{2}\sqrt{15},2)$ en zijn de brandpunten $(-1+\frac{5}{2}\sqrt{3},2)$ en $(-1-\frac{5}{2}\sqrt{3},2)$

b. van $\frac{x^2}{\frac{15}{4}}-\frac{y^2}{15}=1$ is $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{15}{4}}}=\frac{\sqrt{15}}{\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4}}}=\sqrt{4}=2$

dus de asymptoten zijn $y=2x$ en $y=-2x$

dus van $4(x+1)^2-(y-2)^2=15$ zijn de asymptoten $y-2=2(x+1)$ en $y-2=-2(x+1)$

dus $y=2x+4$ en $y=-2x$

c. $k: \quad 4(3+1)(x+1)-(9-2)(y-2)=15$

$k: \quad 16(x+1)-7(y-2)=15$

$k: \quad 16x+16-7y+14=15$

$k: \quad 16x-7y=-15$

## 11.4 Vergelijkingen van de tweede graad

**Opgave 73:**

De ruimtelijke figuur die ontstaat is een kegel, dus de doorsnede van $V$ met de kegel is een cirkel.

**Opgave 74:**

a. vlak $V$ is raakvlak aan de grote bol in punt $F_1$
de punten $P$ en $F_1$ liggen in vlak $V$, dus lijn $PF_1$ is raaklijn aan de grote bol
lijn $OP$ raakt de grote bol int punt $A$
dus $PF_1$ en $PA$ zijn raaklijnstukken aan de grote bol
dus $PF_1 = PA$
op dezelfde manier geldt: $PF_2 = PB$

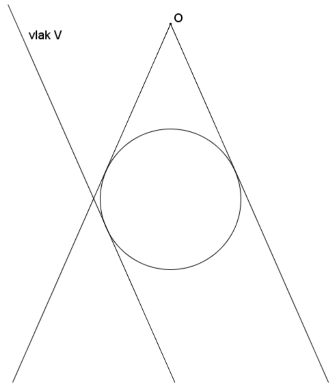
b. $\left.\begin{array}{l} PF_1 = PA \\ PF_2 = PB \end{array}\right\} \quad PF_1 + PF_2 = PA + PB$
als vlak $V$ gegeven is, dan liggen de punten $A$ en $B$ vast, dus $PA + PB = \text{constant}$
dus $PF_1 + PF_2 = \text{constant}$
dus punt $P$ ligt op een ellips met brandpunten $F_1$ en $F_2$

**Opgave 75:**

a. vlak $V$ raakt de grote bol in punt $F_1$
de punten $P$ en $F_1$ liggen in vlak $V$, dus lijn $PF_1$ is raaklijn aan de grote bol
lijn $OP$ raakt de grote bol int punt $A$
dus $PF_1$ en $PA$ zijn raaklijnstukken aan de grote bol
dus $PF_1 = PA$
op dezelfde manier geldt: $PF_2 = PB$

b. $\left.\begin{array}{l} PF_1 = PA \\ PF_2 = PB \end{array}\right\} \quad PF_2 - PF_1 = PB - PA$
als vlak $V$ gegeven is, dan liggen de punten $A$ en $B$ vast, dus $PB - PA = \text{constant}$
dus $PF_2 - PF_1 = \text{constant}$
dus punt $P$ ligt op een hyperbool

**Opgave 76:**




a. de bol moet de kegel en het vlak $V$ raken
in de figuur hiernaast zie je de doorsnede loodrecht op de as van de kegel en loodrecht op vlak $V$
in deze doorsnede moet er dus een cirkel raken aan de twee lijnen door de top van de kegel
dit kan maar één cirkel zijn
dus er is ook maar één bol van Dandelin

b. $\angle(V, as) = \alpha$ dus $\angle(V, W) = 90° - \alpha$

c. $PF$ en $PA$ zijn raaklijnstukken vanuit $P$ aan de bol
dus $PF = PA$

d. $\angle(PA., as) = \alpha$ dus $\angle(PA, W) = 90° - \alpha$

e. $\left.\begin{array}{r}\angle(V,W)=\angle(PB,W)=90^\circ-\alpha \\ \angle(PA,W)=90^\circ-\alpha\end{array}\right\}\ \angle(PA<W)=\angle(PB,W)$

dus $\Delta ABP$ is een gelijkbenige driehoek
dus $PA=PB$

$\left.\begin{array}{r}PA=PB \\ PA=d(P,F) \\ PB=d(P,s)\end{array}\right\}\ d(P,F)=d(P,s)$

dus punt $P$ ligt op de parabool met brandpunt $F$ en richtlijn $s$

**Opgave 77:**

I is een parabool
II is een cirkel
III is een ellips
IV is een hyperbool

**Opgave 78:**

a. $y^2-6x+8y+28=0$

$(y+4)^2-16-6x+28=0$

$(y+4)^2=6x-12$

$(y+4)^2=6(x-2)$

het is een parabool met top $(2,-4)$ en brandpunt $F(1\frac{1}{2}+2,-4)$ dus $F(3\frac{1}{2},-4)$

b. $x^2+9y^2+2x-8=0$

$(x+1)^2-1+9y^2-8=0$

$(x+1)^2+9y^2=9$

$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$

het is een ellips met middelpunt $(-1,0)$ en toppen $(-4,0)$, $(2,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$

$a^2>b^2$ dus $c^2=a^2-b^2=9-1=8$ dus $c=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

dus de brandpunten zijn: $(-1+2\sqrt{2},0)$ en $(-1-2\sqrt{2},0)$

c. $x^2-9y^2+4x-5=0$

$(x+2)^2-4-9y^2-5=0$

$(x+2)^2-9y^2=9$

$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$

het is een hyperbool met middelpunt $(-2,0)$ en toppen $(-5,0)$ en $(1,0)$

$c^2=a^2+b^2=9+1=10$ dus $c=\sqrt{10}$

dus de brandpunten zijn: $(-2+\sqrt{10},0)$ en $(-2-\sqrt{10},0)$

$a^2=9$ dus $a=3$, $b^2=1$ dus $b=1$

dus de asymptoten zijn: $y=\frac{1}{3}(x+2)$ en $y=-\frac{1}{3}(x+2)$

**Opgave 79:**

a. $4x^2+4y^2+2x-12y-15=0$

$4(x^2+\frac{1}{2}x)+4(y^2-3y)-15=0$

$(x^2+\frac{1}{2}x)+(y^2-3y)-\frac{15}{4}=0$

$(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}+(y-1\frac{1}{2})^2-2\frac{1}{4}-\frac{15}{4}=0$

$(x+\frac{1}{4})^2+(y-1\frac{1}{2})^2=\frac{97}{16}$

het is een cirkel met middelpunt $(-\frac{1}{4},1\frac{1}{2})$ en straal $r=\sqrt{\frac{97}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{97}$

b. $4x^2+y^2-8x+8y+16=0$

$4(x^2-2x)+y^2+8y+16=0$

$4((x-1)^2-1)+(y+4)^2-16+16=0$

$4(x-1)^2-4+(y+4)^2=0$

$4(x-1)^2+(y+4)^2=4$

$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$

het is een ellips met middelpunt $(1,-4)$ en toppen $(0,-4)$ , $(2,-4)$ , $(1,-2)$ , $(1,-6)$

$a^2<b^2$ dus $c^2=b^2-a^2=4-1=3$ dus $c=\sqrt{3}$

dus de brandpunten zijn: $(1,-4+\sqrt{3})$ en $(1,-4-\sqrt{3})$

c. $x^2-y^2+4x+8y-20=0$

$(x+2)^2-4-(y^2-8y)-20=0$

$(x+2)^2-((y-4)^2-16)-24=0$

$(x+2)^2-(y-4)^2+16-24=0$

$(x+2)^2-(y-4)^2=8$

$\frac{(x+2)^2}{8}-\frac{(y-4)^2}{8}=1$

het is een hyperbool met middelpunt $(-2,4)$ en toppen $(-2+2\sqrt{2},4)$ en $(-2-2\sqrt{2},4)$

$c^2=a^2+b^2=8+8=16$ dus $c=4$

dus de brandpunten zijn $(-6,4)$ en $(2,4)$

$a^2=b^2=8$ dus $a=b=\sqrt{8}$

dus de asymptoten zijn: $y-4=x+2$ en $y-4=-(x+2)$ ofwel $y=x+6$ en $y=-x+2$

## 11.5 Diagnostische toets

**Opgave 1:**

a. $\frac{1}{2}p = 8$

$p = 16$

$y^2 = 32x$

b. $\frac{1}{2}p = 6 - 10 = -4$

$p = -8$

$y^2 = -16(x - 10)$

c. de top is: $(-1,2)$

$\frac{1}{2}p = 4 - -1 = 5$

$p = 10$

$(y-2)^2 = 20(x+1)$

d. het brandpunt is: $(8,2)$

$\frac{1}{2}p = 3 - 4 = -1$

$p = -2$

$(x-8)^2 = -4(y-3)$

**Opgave 2:**

a. $y^2 - 10y = 2x + 1$

$(y-5)^2 - 25 = 2x + 1$

$(y-5)^2 = 2x + 26$

$(y-5)^2 = 2(x+13)$

$y^2 = 2x \xrightarrow{T(-13,5)} (y-5)^2 = 2(x+13)$

$y^2 = 2x$ heeft als top $(0,0)$ , brandpunt $(\frac{1}{2},0)$, richtlijn $x = -\frac{1}{2}$ en as $y = 0$

$(y-5)^2 = 2(x+13)$ heeft als top $(-13,5)$, brandpunt $(-12\frac{1}{2},5)$, richtlijn $x = -13\frac{1}{2}$ en as $y = 5$

b. $y = \frac{1}{8}x^2 + 2x - 4$

$x^2 + 16x - 32 = 8y$

$(x+8)^2 - 64 - 32 = 8y$

$(x+8)^2 = 8y + 96$

$(x+8)^2 = 8(y+12)$

$x^2 = 8y \xrightarrow{T(-8,-12)} (x+8)^2 = 8(y+12)$

$x^2 = 8y$ heeft als top $(0,0)$, brandpunt $(0,2)$, richtlijn $y = -2$ en as $x = 0$

$(x+8)^2 = 8(y+12)$ heeft als top $(-8,-12)$, brandpunt $(-8,-10)$, richtlijn $y = -14$ en as $x = -8$

**Opgave 3:**

a. $k: \quad y = -1\frac{1}{2}x + \dfrac{-3}{2 \cdot -1\frac{1}{2}}$

$k: \quad y = -1\frac{1}{2}x + 1$

b. $l: \quad 3y = -3x + -3 \cdot -1\frac{1}{2}$

$3y = -3x + 4\frac{1}{2}$

$y = -x + 1\frac{1}{2}$

c. raaklijn $m$ in punt $B(-6,6)$ is: $m: \quad 6y = -3x + -3 \cdot -6$

$6y = -3x + 18$

$3x + 6y = 18$

$x + 2y = 6$

$\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$n: \quad 2x - y = c$ door $(-6,6)$

$n: \quad 2x - y = -18$

d. de poollijn van $P(2,-2)$ ten opzichte van de parabool is lijn $k$

$k: \quad -2y = -3x + -3 \cdot 2$

$-2y = -3x - 6$

$y = 1\frac{1}{2}x + 3$

de snijpunten van $k$ en de parabool zijn:

$(1\frac{1}{2}x + 3)^2 = -6x$

$2\frac{1}{4}x^2 + 9x + 9 = -6x$

$2\frac{1}{4}x^2 + 15x + 9 = 0$

$9x^2 + 60x + 36 = 0$

$x = \dfrac{-60 \pm \sqrt{2304}}{18} = \dfrac{-60 \pm 48}{18}$

$x = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x = -6$

$y = 2 \qquad\quad y = -6$

raaklijn in $(-\frac{2}{3},2)$ is: $m_1: \quad 2y = -3x + -3 \cdot -\frac{2}{3}$

$3x + 2y = 2$

raaklijn in $(-6,-6)$ is: $m_2: \quad -6y = -3x + -3 \cdot -6$

$3x - 6y = 18$

$x - 2y = 6$

**Opgave 4:**

a. $a = 3 \quad b = 2$

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b. $a = 2 \quad b = 1$

$\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{1} = 1$

c. het middelpunt is $(8,2)$

$a = 2 \quad c = 1$

$b^2 = a^2 - c^2 = 3$

$\dfrac{(x-8)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{3} = 1$

d. het middelpunt is $(-1,6)$

$c=4$

$c^2=b^2-a^2$

$b^2=a^2+c^2=a^2+16$

$\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y-6)^2}{b^2}=1$

$\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y-6)^2}{a^2+16}=1$ door $(0,6+\sqrt{15})$

$\frac{1}{a^2}+\frac{15}{a^2+16}=1$

$1+\frac{15a^2}{a^2+16}=a^2$

$a^2+16+15a^2=a^2(a^2+16)$

$16a^2+16=a^4+16a^2$

$a^4=16$

$a^2=4$ dus $b^2=20$

$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-6)^2}{20}=1$

**Opgave 5:**

$x^2+y^2-4x+2y-11=0$

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-11=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2=16$

dus het middelpunt van de cirkel is $M(2,-1)$ en $r=4$

punt $F$ ligt binnen de cirkel dus de conflictlijn is een ellips met brandpunten $(2,-1)$ en $(2,1)$

dus het middelpunt van de ellips is het punt $(2,0)$

$\frac{(x-2)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$d(P,F_1)+d(P,F_2)=r$ en $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2b$

dus $2b=r=4$

dus $b=2$

$c=1$

$c^2=b^2-a^2$

$a^2=b^2-c^2=4-1=3$

$\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

**Opgave 6:**

a. $4x^2+9y^2+32x-18y-71=0$

$4(x^2+8x)+9(y^2-2y)=71$

$4((x+4)^2-16)+9((y-1)^2-1)=71$

$4(x+4)^2-64+9(y-1)^2-9=71$

$4(x+4)^2+9(y-1)^2=144$

$$\frac{(x+4)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

$a^2=36$ dus $a=6$

$b^2=16$ dus $b=4$

$c^2=a^2-b^2=36-16=20$

dus $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

het middelpunt van de ellips is $(-4,1)$

de toppen zijn $(2,1),(-10,1),(-4,5),(-4,-3)$

de brandpunten zijn $(-4+2\sqrt{5},1)$ en $(-4-2\sqrt{5},1)$

b. $6(x+3)^2+(y-2)^2=30$

$$\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{30}=1$$

het middelpunt van de ellips is $(-3,2)$

$a^2=5$ dus $a=\sqrt{5}$

$b^2=30$ dus $b=\sqrt{30}$

$c^2=b^2-a^2=30-5=25$ dus $c=5$

de toppen zijn: $(-3+\sqrt{5},2),(-3-\sqrt{5},2),(-3,2+\sqrt{30}),(-3,2-\sqrt{30})$

de brandpunten zijn: $(-3,7)$ en $(-3,-3)$

**Opgave 7:**

a. $k:\quad 6x+10y\cdot -1=46$

$6x-10y=46$

$3x-5y=23$

b. de raaklijn $m$ in het punt $B(2,3)$ is: $m:\quad 4\cdot 2\cdot x+12\cdot 3\cdot y=124$

$8x+36y=124$

$2x+9y=31$

$\overrightarrow{n_m}=\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n}=\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$

$n:\quad 9x-2y=c$ door $B(2,3)$

$n:\quad 9x-2y=12$

c. de poollijn $l$ van $P(17\tfrac{2}{5},-3)$ ten opzichte van de ellips is:

$25\cdot 17\tfrac{2}{5}x+9\cdot -3y=5625$

$435x-27y=5625$

$145x-9y=1875$

$-9y=-145x+1875$

$3y=48\tfrac{1}{3}x-625$

de snijpunten van lijn $l$ en de ellips zijn:

$25x^2+(48\tfrac{1}{3}x-625)^2=5625$

$25x^2+2336\tfrac{1}{9}x^2-60416\tfrac{2}{3}x+390625=5625$

$2361\tfrac{1}{9}x^2-60416\tfrac{2}{3}x+385000=0$

$21250x^2-543750x+3465000=0$

$17x^2 - 435x + 2772 = 0$

$x = \dfrac{435 \pm \sqrt{729}}{34} = \dfrac{435 \pm 27}{34}$

$x = 12 \quad \vee \quad x = 13\frac{10}{17}$

$y = -15 \qquad y = 10\frac{10}{17}$

raaklijn in $(12,-15)$ is: $25 \cdot 12x + 9 \cdot -15y = 5625$

$300x - 135y = 5625$

$20x - 9y = 375$

raaklijn in $(13\frac{10}{17}, 10\frac{10}{17})$ is: $25 \cdot 13\frac{10}{17}x + 9 \cdot 10\frac{10}{17}y = 5625$

$339\frac{12}{17}x + 95\frac{5}{17}y = 5625$

$5775x + 1620y = 95625$

$385x + 108y = 6375$

d. de raaklijnen zijn van de vorm: $y = -\frac{3}{5}x + b$ ofwel $3x + 5y = 5b$

de raaklijn in het punt $A(x_A, y_{A)}$ is: $3x_A \cdot x + 5y_A \cdot y = 32$

dus $\dfrac{3x_A}{3} = \dfrac{5y_A}{5} = \dfrac{32}{5b}$

dus $15x_A = 15y_A$

dus $x_A = y_A$

$3x_A{}^2 + 5x_A{}^2 = 32$

$8x_A{}^2 = 32$

$x_A{}^2 = 4$

$x_A = 2 \quad \vee \quad x_A = -2$

$y_A = 2 \qquad y_A = -2$

raaklijn in $(2,2)$ is: $3x + 5y = 16$

raaklijn in $(-2,-2)$ is: $3x + 5y = -16$